

# Schubbemessung für kombinierte Beanspruchung nach der Druckfeldtheorie von Collins/Mitchell

Von Professor Dr.-Ing. Gerhard Mehlhorn, Dipl.-Ing. Günter Schmidt-Göner und Dipl.-Ing. Joachim Walther, Technische Hochschule Darmstadt

## 1 Einleitung

Mit der von Collins/Mitchell entwickelten Druckfeldtheorie [1] können das Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonbauteilen unter Torsionsbeanspruchung und das Tragverhalten unter Querkraftbeanspruchung bestimmt werden. Von Teutsch [2] wurde ein ähnliches Verfahren für die Ermittlung des Trag- und Verformungsverhaltens von Rechteckquerschnitten entwickelt.

Das einfache Bemessungsverfahren von Collins/Mitchell [3] geht von Bruchschnittgrößen aus. Ein wesentlicher Vorteil ist die veränderliche Druckstrebenneigung, die eine Optimierung der Gesamtstahlmenge in wirtschaftlicher und konstruktiver Hinsicht ermöglicht. Wesentlich ist, daß ein Rißmoment bestimmt wird; dadurch wird eine Mindestbewehrung definiert, die das Versagen ohne Vorankündigung verhindert.

Zunächst wird die Druckfeldtheorie [1] kurz erläutert. Anschließend werden einige Ergebnisse und Vergleiche mit Versuchen vorgestellt sowie die Bemessung nach diesem Verfahren und nach DIN 1045 verglichen.

## 2 Druckfeldtheorie

### 2.1 Grundlagen

Die Grundlage des Verfahrens ist eine geometrische Kompatibilitätsbeziehung (in der Ebene der Bügelachse), die eine Beziehung zwischen der Neigung ( $\vartheta$ ) der Betondruckstrebe gegen die Querschnittsnormale, der Betonstauchung ( $\varepsilon_{bd}$ ) und den Stahldehnungen ( $\varepsilon_{st}$ ,  $\varepsilon_{shü}$ ) darstellt.

$$\tan^2 \vartheta = \frac{\varepsilon_{st} + \varepsilon_{bd}}{\varepsilon_{shü} + \varepsilon_{bd}} \quad (1)$$

Werden hier die entsprechenden Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen von Beton und Stahl eingesetzt und die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt, so läßt sich das Tragverhalten berechnen.

Für den Stahl wird ein elastisch-plastisches Werkstoffmodell zugrunde gelegt.

Für den Beton wird eine parabelförmige  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Beziehung angesetzt, die jedoch in den Herleitungen durch einen rechteckigen Spannungsblock ersetzt wird.

Durch die Wahl der Beiwerte  $\alpha_1$  und  $\beta_1$  lassen sich somit beliebige  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Beziehungen berücksichtigen (siehe Bild 1).

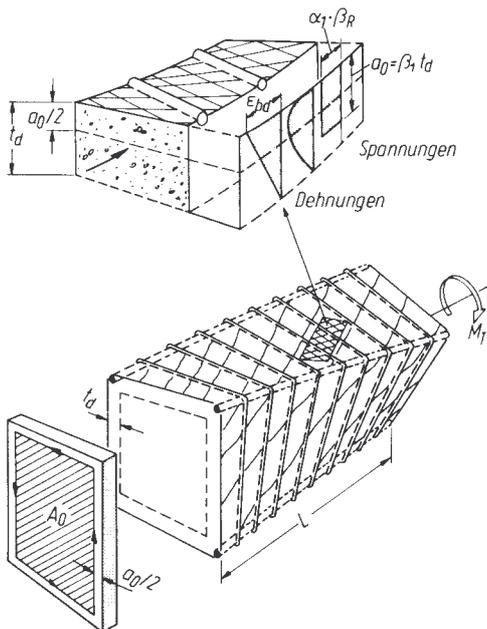


Bild 1. Spannungs- und Verzerrungszustand für reine Torsion

### 2.2 Torsionsbeanspruchung

Unter Torsion wird wegen des möglichen Abplatzens der Betondeckung bereits vor dem Bruchversagen nur der Beton innerhalb der Bügel (Bügelmittellinie) in die Berechnung einbezogen.

In Bild 1 ist der angenommene Verzerrungs- und Spannungsverlauf für die Betondruckdiagonalen dargestellt. Die Mittellinie des angenommenen Spannungsbereichs beschreibt die Lage des resultierenden Schubflusses, der um das Maß  $a_0/2$  nach innen gegen die Bügelmittellinie versetzt ist.

Damit wird

$$A_0 \approx A_{0b\ddot{u}} - \frac{a_0}{2} l_{b\ddot{u}}, \quad (2)$$

wobei  $A_{0b\ddot{u}}$  die von der Bügelmittellinie eingeschlossene Fläche und  $l_{b\ddot{u}}$  die Umfangslänge des Bügels ist.

Die Umfangslänge des Schubflußwegs  $l_0$  ergibt sich zu:

$$l_0 = l_{b\ddot{u}} - 4 a_0. \quad (3)$$

Die vom Schubfluß eingeschlossene Fläche  $A_0$  ist für verschiedene Querschnittsformen aus Bild 2 ersichtlich.

Ähnlich wie für das Fachwerkmodell müssen die Gleichgewichtsbedingungen für die Balkenlängsachse und die Bügelecke erfüllt

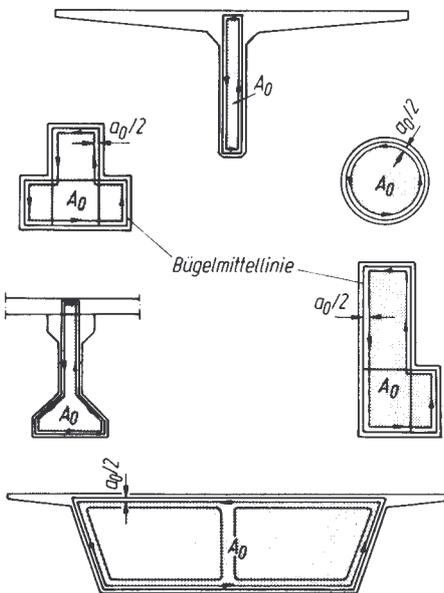


Bild 2. Darstellung der Betondruckzone  $a_0$  und der angesetzten Kernfläche  $A_0$  für verschiedene Querschnitte

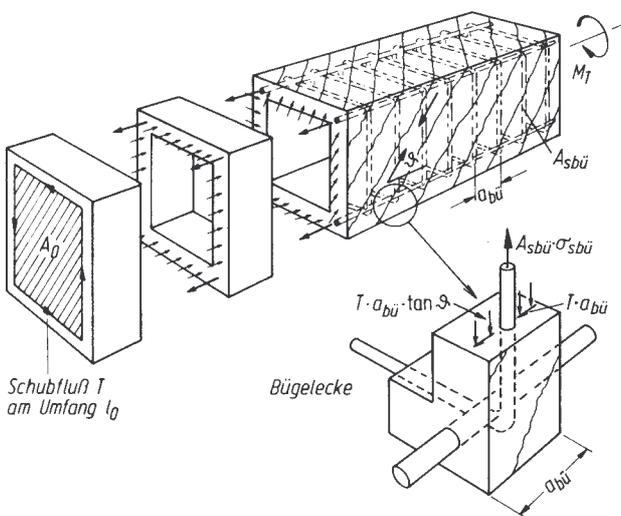


Bild 3. Gleichgewichtsbedingungen für reine Torsion

werden. Hieraus (Bild 3) ergeben sich die Gleichungen:

$$\Delta N = T \frac{l_0}{\tan \varphi} = \frac{M_T}{2 A_0} \frac{l_0}{\tan \varphi}, \quad (4)$$

$$A_{sb\ddot{u}} \sigma_{sb\ddot{u}} = T a_{b\ddot{u}} \tan \varphi = \frac{M_T a_{b\ddot{u}}}{2 A_0} \tan \varphi. \quad (5)$$

Die Dicke der Druckzone ist, ähnlich wie bei der Biegebemessung, von den Dehnungen bzw. den Kräften in der Bewehrung abhängig.

Durch Einsetzen der Beziehung

$$T = \alpha_1 \beta_R a_0 \sin \varphi \cos \varphi \quad (6)$$

in die Gleichungen (4) und (5) ergibt sich die Dicke der Druckzone zu

$$a_0 = \frac{\Delta N}{\alpha_1 \beta_R l_0} + \frac{A_{sb\ddot{u}} \sigma_{sb\ddot{u}}}{\alpha_1 \beta_R a_{b\ddot{u}}}. \quad (7)$$

Mit dem Dehnungskreis von Mohr lassen sich Beziehungen zwischen der diagonalen Betonstauchung ( $\epsilon_{bd}$ ) und den Stahldehnungen der Bügel ( $\epsilon_{sb\ddot{u}}$ ) und der Längsbewehrung ( $\epsilon_{sl}$ ) herstellen:

$$\epsilon_{sb\ddot{u}} = \left[ \frac{\alpha_1 \beta_1 \beta_R A_{0b\ddot{u}} a_{b\ddot{u}}}{2 l_{b\ddot{u}} A_{sb\ddot{u}} \sigma_{sb\ddot{u}}} - 1 \right] \epsilon_{bd}, \quad (8)$$

$$\epsilon_{sl} = \left[ \frac{\alpha_1 \beta_1 \beta_R A_{0b\ddot{u}} l_0}{2 l_{b\ddot{u}} \Delta N} - 1 \right] \epsilon_{bd}. \quad (9)$$

Damit sind alle für eine Bemessung erforderlichen Größen bestimmt.

### 2.3 Querkraftbeanspruchung

Ähnlich wie bei der Torsionsbeanspruchung kann bei hoher Querkraftbeanspruchung auch die Betonschale außerhalb der Bügel abplatzen. Sie wird deshalb ebenfalls nicht berücksichtigt. Für die Ermittlung der Betondruckstauchung wird weiter davon ausgegangen, daß der Schubfluß über die wirksame Höhe  $d_Q$  konstant ist.

Die bei der Aufnahme der Schubkräfte mitwirkende Betonfläche soll durch die Mittellinie der in den Ecken liegenden Längsstäbe in der Höhe ( $d_Q$ ) und durch die Bügelmittellinie in der Breite ( $b_Q$ ) begrenzt werden. Dies ist für verschiedene Querschnittsformen in

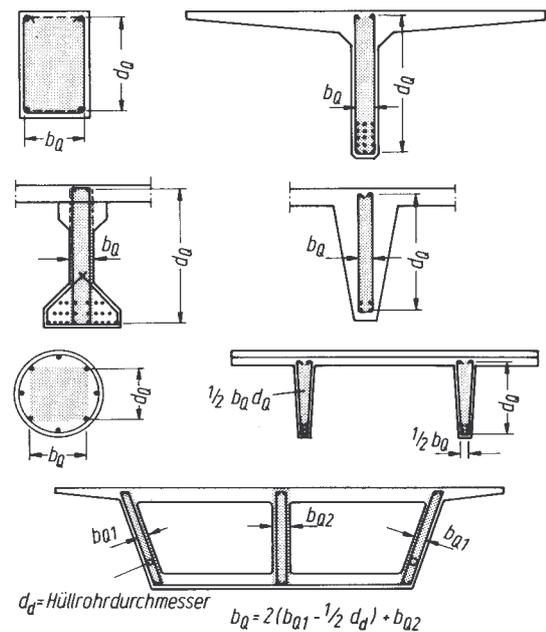


Bild 4. Anzusetzende Rechenwerte  $b_Q, d_Q$  für verschiedene Querschnitte

Bild 4 dargestellt. Die wirklichen Spannungsverteilungen für die Querschnitte des Bildes 4 sind nicht gleichförmig. Da aber nur die sogenannten wirksamen Querschnitte berücksichtigt werden, liegt die Rechnung auf der sicheren Seite.

### 3 Bemessung

#### 3.1 Torsionsbemessung

Für einen vorgewählten Querschnitt muß zunächst überprüft werden, ob das Versagen nicht durch Erreichen der Betondruckfestigkeit eintritt. Die Dicke der Betondruckzone ist:

$$a_0 = \frac{A_{0b\ddot{u}}}{l_{b\ddot{u}}} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{M_{Tu} l_{b\ddot{u}}}{\alpha_1 \beta_R A_{0b\ddot{u}}^2} \left( \tan \vartheta + \frac{1}{\tan \vartheta} \right)} \right] \quad (10)$$

Nun lassen sich weiter die Stahldehnungen  $\epsilon_{sb\ddot{u}}$  und  $\epsilon_{sl}$  ermitteln:

$$\epsilon_{sb\ddot{u}} = \left[ \frac{\alpha_1 \beta_1 \beta_R A_0}{\tau_u A_{0b\ddot{u}} \tan \vartheta} - 1 \right] \epsilon_{bu}, \quad (11)$$

$$\epsilon_{sl} = \left[ \frac{\alpha_1 \beta_1 \beta_R A_0}{\tau_u A_{0b\ddot{u}}} \tan \vartheta - 1 \right] \epsilon_{bu} \quad (12)$$

mit  $\tau_u = \frac{M_{Tu} l_{b\ddot{u}}}{A_{0b\ddot{u}}^2} \quad (13)$

Da diese Werte alle abhängig von der Betongrenzstauchung ( $\epsilon_{bu}$ ) und dem Druckstrebenneigungswinkel  $\vartheta$  sind, ist die Auswertung dieser Gleichungen in einem Diagramm (Bild 5) besonders hilfreich. Das Diagramm wurde für eine von Collins empfohlene maximale Betondruckstauchung von 3 ‰ aufgestellt.

Um den Gebrauch des Diagramms zu erläutern, sei angenommen, daß die Längs- und Bügelbewehrung bei 2 ‰ Dehnung zu fließen beginnt. Für diesen Fall kann aus Bild 5 ermittelt werden, daß bei dem Wert  $\tau_u/\beta_R = 0,36$  beide Bewehrungen nur dann fließen, wenn  $\vartheta = 45^\circ$  ist. Für  $\tau_u/\beta_R = 0,1$  fließen die Stähle für jeden beliebigen Winkel  $\vartheta$  zwischen  $14^\circ$  und  $76^\circ$ . Wird ein kleiner Wert für  $\vartheta$  gewählt, erhält man bei der Bemessung mehr Längs- und weniger Bügelbewehrung. Für einen großen Wert von  $\vartheta$  kehrt sich das Verhältnis von Bügel- zu Längsbewehrung um.

Sollte sich für die vorgegebene Betondruckstauchung ( $\epsilon_{bu}$ ) kein zulässiger Winkel  $\vartheta$  finden, so ist der Betonquerschnitt unterbemessen.

Nach Festlegung der Druckstrebenneigung  $\vartheta$  und Ermittlung von  $a_0$  ist die erforderliche Bewehrung über die Gleichungen

$$A_{sb\ddot{u}} = \frac{M_{Tu} a_{b\ddot{u}}}{2 A_0 \beta_S} \tan \vartheta, \quad (14)$$

$$A_{sl} = \frac{M_{Tu} l_0}{2 A_0 \tan \vartheta \beta_S} \quad (15)$$

zu bestimmen.

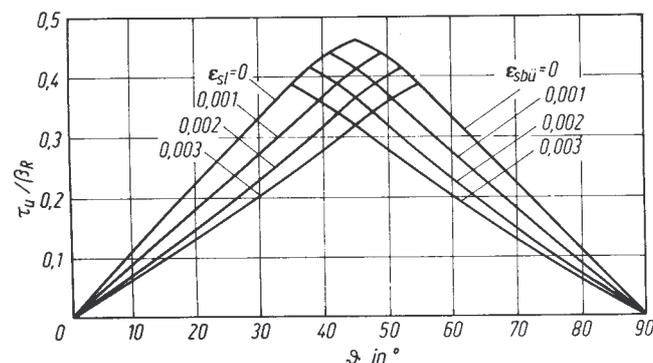


Bild 5. Diagramm zur Bestimmung der zulässigen Druckstrebenneigung für Torsion

Dieses Verfahren gilt genau genommen nur für reine Torsion. Anhand von Versuchen konnte in [3, 4] nachgewiesen werden, daß für Torsion und Biegung die Längsbewehrung durch einfache Superposition des beschriebenen Verfahrens mit der üblichen Biegebemessung genügend genau ermittelt werden kann.

#### 3.2 Querkraftbemessung

Wie bei der Torsion muß zuerst geprüft werden, ob ein Querschnitt ausreichend bemessen ist, um die Bruchlasten aufzunehmen. Um dies zu erkennen, müssen die Dehnungen der Längs- und Bügelbewehrung ermittelt werden:

$$\epsilon_{sb\ddot{u}} = \left[ \frac{6,6 \sin \vartheta \cos \vartheta - 4 \frac{\tau_u}{\beta_R} - 1}{\frac{\tau_u}{\beta_R} (1 + \tan^2 \vartheta)} \right] 0,002, \quad (16)$$

$$\epsilon_{sl} = \left[ \frac{6,6 \sin \vartheta \cos \vartheta - 4 \frac{\tau_u}{\beta_R} - 1}{\frac{\tau_u}{\beta_R} \left( 1 + \frac{1}{\tan^2 \vartheta} \right)} \right] 0,002 \quad (17)$$

mit  $\tau_u = \frac{Q_u}{b_Q d_Q} \quad (18)$

Collins/Mitchel lassen hier auf Grund von Versuchen nur eine Druckstauchung von 2 ‰ zu. Die Faktoren 4,0 und 6,6 resultieren aus einem Vergleich der Mohrschen Verzerrungskreise eines Zylinderdruckversuchs mit einem auf Schub beanspruchten Stahlbetonbalken.

Auch diese Werte sind von der Druckstrebenneigung abhängig; sie können ebenfalls in einem Diagramm dargestellt werden. In Bild 6 sind diese Kurven im Vergleich zu denen für Torsion dargestellt.

Nach Festlegung des Winkels  $\vartheta$  wird die Betondruckspannung nach Gleichung (19) ermittelt; siehe auch Bild 7 c:

$$\sigma_{bd} = \frac{Q_u}{b_Q d_Q \sin \vartheta \cos \vartheta} \quad (19)$$

Bei Anwendung dieser Theorie im Rahmen von DIN 4227 empfehlen wir, die Betondruckspannungen auf die in den Zeilen 62 bzw. 63 der Tabelle 9 angegebenen Werte zu begrenzen. Dies ist bei Einhaltung der Druckstrebenneigung entsprechend dem Diagramm gewährleistet.

Die erforderliche Bügelbewehrung ergibt sich entsprechend Bild 7 d mit:

$$A_{sb\ddot{u}} = \frac{Q_u a_{b\ddot{u}}}{d_Q \beta_S} \tan \vartheta. \quad (20)$$

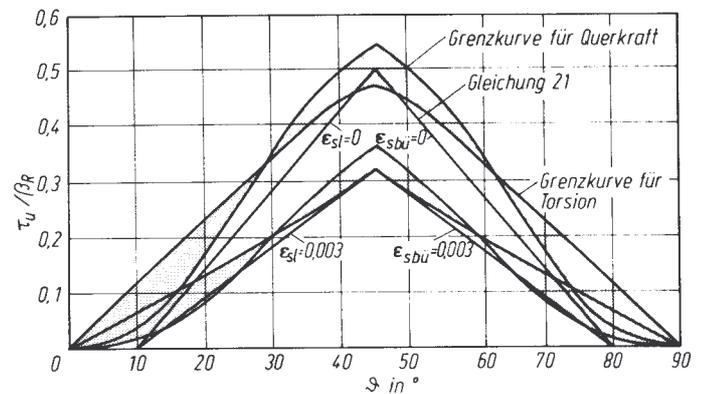


Bild 6. Diagramm zur Bestimmung der zulässigen Druckstrebenneigung für Querkraft und Torsion

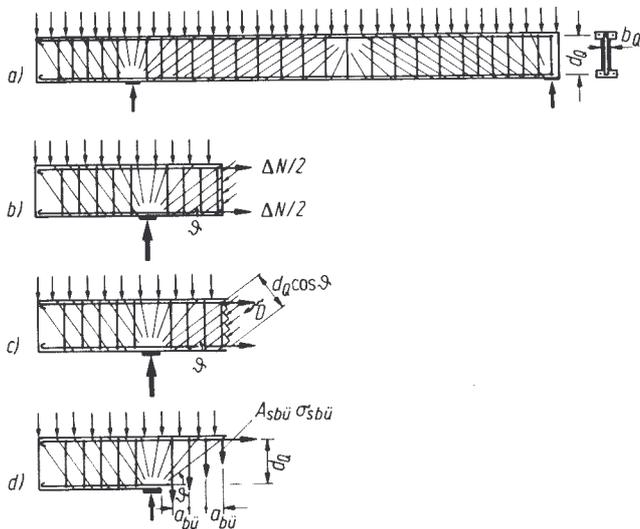


Bild 7. Schematische Darstellung der Kraftabtragung unter Querkraft. a) System und Belastung, b) Gleichgewicht am Momentennullpunkt, c) Summe der Horizontalkräfte Null, d) Summe der Vertikalkräfte Null

Im Gegensatz zur DIN-Bemessung, bei der der Anteil der Längsbewehrung aus Querkraftbeanspruchung über das Versatzmaß „versteckt“ berücksichtigt wird, weist die Bemessung nach der Druckfeldtheorie diesen Anteil gesondert aus; siehe auch Bild 7 b):

$$A_{sl} = \frac{\Delta N}{\beta_s} = \frac{Q_u}{\tan \vartheta \beta_s} \quad (20 a)$$

### 3.3 Bemessung für Torsion, Querkraft und Biegung

Das vereinfachte Bemessungsverfahren basiert auf den Diagrammen für Torsion und Querkraft. Aus Bild 6 ist zu erkennen, daß beide Grenzkurven ähnlich sind und durch die folgenden Gleichungen beschrieben werden können:

$$10 + \frac{\tau_u 29,4}{(0,42 - 50 \varepsilon_{sl}) \beta_R} < \vartheta < 80 - \frac{\tau_u 29,4}{(0,42 - 50 \varepsilon_{sbü}) \beta_R} \quad (21)$$

$$\text{mit } \tau_u = \frac{M_{Tu} I_{bü}}{A_{0bü}^2} + \frac{Q_u}{b_Q d_Q} \quad (22)$$

Um einen Querschnitt für die drei Lasten  $M$ ,  $M_T$  und  $Q$  zu bemessen, muß zuerst die Schubspannung  $\tau_u$  berechnet werden. Mit der Fließdehnung der Längs- und Bügelbewehrung ( $\varepsilon_{sl}$ ,  $\varepsilon_{sbü}$ ) und  $\tau_u$  ergibt Gl. (21) die Grenzwerte für  $\vartheta$ . Falls  $\min \vartheta$  größer als  $\max \vartheta$  ist, muß der Betonquerschnitt vergrößert werden.

Mit einem gewählten Wert  $\vartheta$  kann die erforderliche Bewehrung mit Gl. (20) für die Querkraft und mit den Gln. (14) und (15) für das Torsionsmoment berechnet werden.

Die erforderliche Biege-Längsbewehrung wird wie üblich ermittelt.

### 4 Mindestbewehrung

Um sicherzustellen, daß nicht durch zu wenig Bewehrung ein plötzliches Versagen bei Erreichen der Rißlast eintritt, sollte eine Mindestbewehrung, die sich an den Rißbeanspruchungen orientiert, vorgesehen werden. In Anlehnung an die ACI-Norm wird dafür ein Sicherheitsabstand zur Rißbeanspruchung von 1,2 vorgeschlagen.

Die gesamte Rißbeanspruchung wird aus einer geometrischen Addition ermittelt und durch Gl. (23) ausgedrückt:

$$\left( \frac{M_{TR}}{M_{TOR}} \right)^2 + \left( \frac{Q_R}{Q_{OR}} \right)^2 + \left( \frac{M_R}{M_{OR}} \right)^2 = 1, \quad (23)$$

wobei  $M_{TR}$ ,  $Q_R$  und  $M_R$  die Rißschnittgrößen unter kombinierter Belastung sind, während  $M_{TOR}$  das reine Torsionsrißmoment,  $Q_{OR}$  die reine Rißquerkraft und  $M_{OR}$  das reine Biegerißmoment sind.

Die Rißlast für reine Torsion kann mit

$$M_{TOR} = \frac{A_b^2}{u_b} 0,36 \sqrt{\beta_R} \sqrt{1 + \frac{\sigma_b^v}{0,36 \sqrt{\beta_R}}} \quad (24)$$

abgeschätzt werden, wobei  $u_b$  der Umfang und  $A_b$  die Fläche des Betonquerschnitts ist.  $\sigma_b^v$  ist die Betondruckspannung aus Vorspannung im Schwerpunkt des Querschnitts. Die Spannungen sind in  $\text{MN/m}^2$  einzusetzen.

Die Rißlast für reine Querkraft ist näherungsweise

$$Q_{OR} = b_s h 0,36 \sqrt{\beta_R} \sqrt{1 + \frac{\sigma_b^v}{0,36 \sqrt{\beta_R}}} \quad (25)$$

dabei sind  $b_s$  die Dicke des Steges und  $h$  die statische Höhe.

Die Rißlast infolge reiner Biegung ergibt sich aus

$$M_{OR} = W (0,65 \sqrt{\beta_R} + \sigma_{bz}^v) \quad (26)$$

dabei sind  $W$  das Widerstandsmoment des Querschnitts für die gezogene Faser und  $\sigma_{bz}^v$  die Betondruckspannung aus Vorspannung in der vorgedrückten Zugzone.

Um mit den gegebenen Gleichungen die Rißlast zu definieren, wird noch zusätzlich angenommen, daß das Verhältnis der Bruchschnittgrößen gleich dem Verhältnis der Rißschnittgrößen ist ( $M_{TR}/Q_R = M_{Tu}/Q_u$ ,  $M_R/Q_R = M_u/Q_u$ ).

### 4.1 Beschränkung der diagonalen Rißbreite

Da große Schubrißbreiten unter Gebrauchslasten vermieden werden sollen, sollte die Stahldehnung der Bügel 1‰ nicht überschreiten. Bleibt die Gebrauchslast unterhalb der Rißbeanspruchung, kann dies als erfüllt gelten.

Da bei der Bemessung das Verhältnis von Bügel und Längsbewehrung über die Wahl der Druckstrebenneigung bestimmt wird, ist eine Begrenzung der unteren Grenze des Winkels sinnvoll, damit eine entsprechend starke Bügelbewehrung erreicht wird:

$$\tan \vartheta \geq \left( \frac{\beta_s}{200} \frac{Q}{Q_u} \right)^2 \left( 1 - \frac{\beta_s \sigma_b^v}{240 \beta_R} \right) \left[ 1 - \left( \frac{Q_R}{Q} \right)^3 \right]^2 \quad (27)$$

$Q$  ist die Querkraft unter Gebrauchslast.

Die Kräfte sind in MN, Spannungen in  $\text{MN/m}^2$  einzusetzen. Die diagonalen Risse werden aber nicht nur durch einen höheren Anteil der Bügelbewehrung beschränkt; es ist genauso wichtig, die Bügelabstände klein zu halten.

### 5 Vergleich der Theorie mit Versuchsergebnissen

In [3] zeigen Collins/Mitchel die Übereinstimmung der Theorie mit eigenen Versuchen.

Wir haben zusätzlich die verschiedenen Versuchsbalken der Technischen Universität Braunschweig [5] und der ETH Zürich [6] für die ermittelten Bruchschnittgrößen bemessen und gute Übereinstimmungen mit den ausgeführten Bewehrungen erzielt. Die nach der Theorie ermittelten Bewehrungen lagen etwas über den in den Versuchen verwendeten; damit liegt das Verfahren auf der sicheren Seite. Die Tabellen 1 und 2 zeigen exemplarisch diese Gegenüberstellung für drei Beispiele.

### 6 Berechnungsbeispiel

Um den Rechengang der Bemessung mit der Druckfeldtheorie zu erläutern, soll ein schlaff bewehrter Rechteckquerschnitt unter Torsions-, Querkraft- und Momentenbeanspruchung berechnet werden.

Tabelle 1. Versuchsdaten

Nr.	Ausführende Stelle	Versuch	Beton		Bewehrung				Bruchschnittgrößen		
			$\beta_R$ MN/m <sup>2</sup>	b/d cm/cm	$\beta_S$ MN/m <sup>2</sup>	$A_{sl(M)}$ cm <sup>2</sup>	$A_{sl(T)}$ cm <sup>2</sup>	$a_{sbü}$ cm/m	$Q_u$ kN	$M_u$ kNm	$M_{Tu}$ kNm
1	ETH Zürich	TB 1	22,4	50/50	390	9,0	9,0	20,6	—	137	117
2	TU Braunschweig	QT 3.1	17,5	24/44	420	11,4	4,5	8,5	—	219	32
3	ETH Zürich	TB 12	25,7	50/50	540	6,3	6,3	7,1	180	164	40

Tabelle 2. Bemessung nach der Druckfeldtheorie

Nr.	Gewählter Druckstrebenwinkel	erf $A_{sl(M)}$ (cm <sup>2</sup> )	erf $A_{sl(T)}$ (cm <sup>2</sup> )	erf $a_{sbü}$ cm <sup>2</sup> /m
1	30,0	7,8	25,0	9,6
	52,5		10,9	21,8
	61,0		8,1	30,5
2	37,5	16,0	8,0	8,2
	45,0		6,1	10,5
	52,5		4,7	13,8
3	31,5	7,0	7,8	7,2
	45,0		4,8	11,7
	58,5		2,9	19,1

Abmessungen: Breite  $b = 24$  cm,  
Dicke  $d = 44$  cm,  
Bügeldurchmesser  $d_{bü} = 6$  mm,  
Längstabdurchmesser  $d_l = 12$  mm,  
Betondeckung  $\ddot{u} = 1,0$  cm;

Schnittgrößen: vorh  $Q = 50$  kN,  
vorh  $M_T = 10$  kNm,  
vorh  $M = 150$  kNm;

Baustoffe: Beton B 25 und Betonstahl BSt 420/500.

## 6.1 Druckfeldtheorie nach Collins/Mitchel

### 6.1.1 Abschätzung der Rißschnittgrößen

#### a) Rißmoment für reine Biegung:

Für das Beispiel wurde die Rechenfestigkeit entsprechend DIN 1045 mit  $\beta_R = 17,5$  MN/m<sup>2</sup> angesetzt.

$$M_{0R} = W \cdot 0,65 \sqrt{\beta_R} = 21,2 \text{ kNm}$$

#### b) Rißmoment für reine Torsion:

$$M_{TOR} = \frac{A_b^2}{l_0} \cdot 0,36 \sqrt{\beta_R} = 12,3 \text{ kNm}$$

#### c) Rißlast für reine Querkraft:

$$Q_{0R} = b h 0,36 \sqrt{\beta_R} = 151,1 \text{ kN}$$

#### d) Rißschnittgrößen unter kombinierter Belastung:

$$\text{Aus } \left( \frac{M_{TR}}{M_{TOR}} \right)^2 + \left( \frac{Q_R}{Q_{0R}} \right)^2 + \left( \frac{M_R}{M_{0R}} \right)^2 = 1 \text{ ergibt sich}$$

$$Q_R = \sqrt{1 / \left[ \left( \frac{10,0}{12,3 \cdot 50} \right)^2 + \left( \frac{1}{50} \right)^2 + \left( \frac{150,0}{21,2 \cdot 50} \right)^2 \right]}$$

$$= 7,01 \text{ kN,}$$

$$M_{TR} = \frac{M_T}{Q} Q_R = 1,4 \text{ kNm,}$$

$$M_R = \frac{M}{Q} Q_R = 21,0 \text{ kNm.}$$

Die Rißschnittgrößen sind kleiner als die vorhandenen, d. h. die Bemessung kann für die vorhandenen Schnittgrößen durchgeführt werden.

### 6.1.2 Berechnung von $\min \vartheta$ zur Rissebeschränkung

$$\tan(\min \vartheta) = \left( \frac{\beta_S Q}{200 Q_u} \right) \cdot \left[ 1 - \left( \frac{Q_R}{Q} \right)^3 \right]^2 = 1,20,$$

$$\min \vartheta = 50,1^\circ.$$

### 6.1.3 Bemessung:

#### a) mitwirkende Betonquerschnitte:

für Torsion:

$$l_{bü} = 2(b + d - 4\ddot{u} - 2d_{bü}) = 1,26 \text{ m,}$$

$$A_{0bü} = (d - 2\ddot{u} - d_{bü})(b - 2\ddot{u} - d_{bü}) = 0,088 \text{ m}^2,$$

für Querkraft:

$$b_Q = 0,21 \text{ m,}$$

$$d_Q = 0,40 \text{ m.}$$

#### b) Berechnung der Grenzwerte $\min \vartheta$ und $\max \vartheta$

$$\tau_u = \frac{M_{Tu} \cdot l_{bü}}{A_{0bü}^2} + Q_u / b_Q d_Q = 3,83 \text{ MN/m}^2,$$

$$\min \vartheta = 10 + \frac{\tau_u / \beta_R}{0,42 - 50 \varepsilon_{sbü}} \cdot 29,4 = 30,1^\circ,$$

$$\max \vartheta = 80 - \frac{\tau_u / \beta_R}{0,42 - 50 \varepsilon_{sbü}} \cdot 29,4 = 59,9^\circ.$$

#### c) Wahl des Druckstrebenwinkels: $\vartheta = 50^\circ$ .

#### d) Berechnung der Kernfläche $A_0$ und des Kernumfangs $l_0$

$$a_0 = \frac{A_{0bü}}{l_{bü}} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{M_{Tu} l_{bü}}{0,973 \beta_R A_{0bü}^2} \left( \tan \vartheta + \frac{1}{\tan \vartheta} \right)} \right]$$

$$= 13,0 \text{ mm,}$$

$$A_0 = A_{0bü} - \frac{a_0}{2} l_{bü} = 0,08 \text{ m}^2,$$

$$l_0 = l_{bü} - 4 a_0 = 1,20 \text{ m.}$$

#### e) Berechnung der erforderlichen Bügelbewehrung:

$$\text{erf } a_{sbü} = \left( \frac{M_{Tu}}{A_0 \beta_S} + \frac{Q_u}{d_Q \beta_S} \right) \tan \vartheta = 12,4 \text{ cm}^2/\text{m.}$$

#### f) Berechnung der erforderlichen Längsbewehrung für $M_T$ und $Q$ :

$$\Delta N = \frac{1}{\tan \vartheta} \sqrt{Q_u^2 + \left( \frac{M_{Tu} l_0}{2 A_0} \right)^2} = 132,3 \text{ kN,}$$

$$\text{erf } A_{sl} = \Delta N / \beta_S = 3,15 \text{ cm}^2.$$

#### g) Berechnung der erforderlichen Biegebewehrung:

Diese kann mit den herkömmlichen Verfahren (z. B.  $k_h$ -Verfahren) durchgeführt werden.

Tabelle 3. Vergleich der Bemessungsergebnisse nach der Druckfeldtheorie und DIN 1045

Abmessungen:  $b = 24$  cm,  $d = 44$  cm, Betondeckung:  $\ddot{u} = 1,0$  cm, Bügeldurchmesser:  $d_{b\ddot{u}} = 6$  mm, Längstabdurchmesser:  $d_l = 12$  mm, Baustoffe: B 25 und BSt 420/500

$Q = 50$	Druckfeldtheorie									DIN 1045	
	für min $\vartheta$			für $\vartheta = 45^\circ$			für max $\vartheta$				
	$M_T$	$\vartheta$	erf $a_{sb\ddot{u}}$	erf $A_{sl}$	erf $a_{sb\ddot{u}}$	erf $A_{sl}$	$\vartheta$	erf $a_{sb\ddot{u}}$	erf $A_{sl}$	erf $a_{sb\ddot{u}}$	erf $A_{sl}$
kNm	°	cm <sup>2</sup> /m	cm <sup>2</sup>	cm <sup>2</sup> /m	cm <sup>2</sup>	°	cm <sup>2</sup> /m	cm <sup>2</sup>	cm <sup>2</sup> /m	cm <sup>2</sup>	
0,0	15,42	1,45	7,55	5,26	2,08	74,58	19,07	0,57	2,35	0,00	
2,5	19,10	2,24	6,40	6,46	2,21	70,90	18,71	0,77	7,01	0,76	
5,0	22,77	3,26	6,16	7,72	2,57	67,23	18,50	1,08	8,38	1,55	
7,5	26,45	4,53	6,28	9,04	3,10	63,55	18,32	1,55	9,66	2,32	
10,0	30,12	6,10	6,50	10,43	3,75	59,88	18,14	2,19	10,94	3,10	
12,5	33,80	8,03	6,72	11,91	4,47	56,20	17,92	3,01	} nach DIN 1045 nicht zulässig		
15,0	37,47	10,40	6,90	13,50	5,27	52,53	17,70	4,05			
17,5	41,15	13,33	7,03	15,23	6,13	48,85	17,45	5,37			
20,0	44,82	17,02	7,12	17,13	7,07	45,18	17,24	7,03			

### 6.2 Bemessung nach DIN 1045

Eine Bemessung nach DIN 1045 ergibt, daß die angenommenen Schnittgrößen nicht unzulässig groß sind. Es werden erf  $a_{sb\ddot{u}} = 11,23$  cm<sup>2</sup>/m, erf  $A_{sl} = 3,18$  cm<sup>2</sup>.

### 6.3 Vergleich

Man erkennt, daß das Verfahren nach Collins/Mitchell für das betrachtete Beispiel im Vergleich zu DIN 1045 kaum unterschiedliche Bewehrungen ergibt. Um jedoch die Vorteile dieses Verfahrens deutlich zu machen, wurde der gleiche Querschnitt für verschiedene andere Belastungen bemessen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3 angegeben.

Wie zu erkennen ist, ermöglicht die Druckfeldtheorie eine Bemessung für viel größere Lasten als DIN 1045. Die in der deutschen Norm festgelegten Schubspannungsgrenzwerte, die ein Betonversagen verhindern sollen, liegen im Vergleich zur Druckfeldtheorie sehr weit auf der sicheren Seite, so daß nur verhältnismäßig kleine Querkräfte und Torsionsmomente zugelassen werden.

Bei den an der Technischen Universität Braunschweig durchgeführten Versuchen wurde auch festgestellt, daß die aufnehmbaren Lasten wesentlich größer sind, als dies nach DIN 1045 zur Zeit zulässig ist.

Allerdings ist zu den Ergebnissen nach der Druckfeldtheorie zu bemerken, daß die Einschränkung des Neigungswinkels  $\vartheta$  der Betondruckstreben wegen der Rissebeschränkung ebenfalls zu einer Minderung der zulässigen Gebrauchslasten führen kann, weil keine klaffenden Risse zugelassen werden.

Da bei der Ermittlung von min  $\vartheta$  aus der Rissebeschränkung das Biegemoment über den Wert  $Q_R$  (siehe Beispiel) einen Einfluß hat, werden die Grenzen für zwei verschiedene Momente ermittelt:  $M_1 = 50$  kNm,  $M_2 = 250$  kNm.

Weiter zeigt sich, daß für eine Druckstrebenneigung von  $\vartheta = 45^\circ$  nach dem Verfahren von Collins/Mitchell für geringe Beanspruchung etwas mehr an Bewehrung ermittelt wird, jedoch für höhere Beanspruchung etwa die gleiche Bewehrung erforderlich ist. Durch die verhältnismäßig große Variationsbreite des Winkels  $\vartheta$  wird jedoch im allgemeinen eine für mehrere Lastfallkombinationen bestmögliche Bewehrung ermittelt werden können.

### 7 Abschließende Bemerkungen

Das dargestellte Verfahren erscheint uns grundsätzlich für den Anwendungsbereich von DIN 1045 und DIN 4227 geeignet, besonders für die Bemessung von Stahlbetonbalken unter kombinierter Beanspruchung.

Im Vergleich zur DIN-Bemessung sind die wesentlichen Unterschiede:

- Veränderlicher Winkel  $\vartheta$  zwischen der Druckdiagonalen und der Normalen zur Querschnittsebene auch für Torsionsbeanspruchung,
- Abhängigkeit der für die Bemessung maßgebenden Dicke der Torsionsdruckstreben von der Beanspruchung.

Die Druckfeldtheorie wurde ursprünglich für nicht vorgespannte Stahlbetonträger entwickelt und zur einheitlichen Bemessung für nicht vorgespannte und vorgespannte Stahlbetonträger unter kombinierter Beanspruchung erweitert. Wie DIN 4227 führt es jedoch für Spannbetonträger meist zu Überbemessungen. Hier sollte das Verfahren in Zukunft noch verbessert werden.

Besonders soll noch hervorgehoben werden, daß bei der Anwendung des Bemessungsverfahrens der Konstrukteur große Freiheiten bezüglich der Aufteilung der erforderlichen Längs- und Bügelbewehrung besitzt und bei den verschiedenen Lastfallkombinationen die zu wählende Bewehrung optimieren kann.

Das vorgestellte Verfahren eignet sich gut für die Programmierung auf Taschenrechnern; die vorgelegten Ergebnisse wurden auf diese Weise ermittelt.

Für reine Torsion bietet das Verfahren von Collins/Mitchell auch die Möglichkeit der Verformungsberechnung des Tragwerks; auch hier stimmten Berechnungen und Versuchsergebnisse gut überein.

#### Literatur:

- [1] Mitchell, D., und Collins, M. P.: Diagonal Compression Field Theory. ACI-Journal V 71, Aug. 1974.
- [2] Teutsch, M.: Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbeton- und Spannbetonbalken mit rechteckigem Querschnitt unter kombinierter Beanspruchung aus Biegung, Querkraft und Torsion. Dissertation, Universität Braunschweig, 1979.
- [3] Collins, M. P., und Mitchell, D.: Shear and Torsion, Design of Prestressed and Non-Prestressed Concrete Beams. PCI-Journal, Sept./Okt. 1980.
- [4] Mardukhi, J.: The Behaviour of uniformly Prestressed Concrete Box Beams in Combined Torsion and Bending. MA Sc. Thesis, University of Toronto, 1974.
- [5] Ojha, S. K.: Theoretische und experimentelle Untersuchung von Stahlbetonrechteckbalken unter kombinierter Beanspruchung aus Torsion, Biegemoment und Querkraft. Bericht aus dem Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau der Technischen Universität Braunschweig, 1973.
- [6] Lüchinger, P., Thürlimann, B.: Versuche an Stahlbetonbalken unter Torsion, Biegung und Querkraft. Bericht aus dem Institut für Baustatik der ETH Zürich, Nr. 6506-5, 1973.